Esercizi di Algebra Lineare,

C.S. in Matematica, a.a.2007-08.

Matrici e sistemi lineari (1 ott. 07)

Es. 1. Esiste $A \in M_2(\mathbb{R})$ tale che $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$?

Es. 2. In $M_2(\mathbb{R})$ siano $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
Stabilire quanti elementi hanno gli insiemi

$$\{ A^n \mid n \in \mathbb{N}^* \}, \qquad \{ B^n \mid n \in \mathbb{N}^* \}, \qquad \{ (BA)^n \mid n \in \mathbb{N}^* \}$$

Es. 3. Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), B \in M_{n,p}(\mathbb{R}), C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$. Provare che $(AB)C = A(BC)$.

Es. 4. Stabilire se in $M_2(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ è invertibile.

Es. 5. Data $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, provare che $A^3 = 5\, I_3$ e determinare A^7 e A^{-1} .

Es. 6. Per ciascuna delle seguenti matrici reali trovare una matrice totalmente ridotta per righe equivalente per righe ad essa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Es. 7. Per ciascuna matrice A dell'esercizio precedente scrivere il sistema lineare che ha A come matrice completa e descrivere le sue soluzioni.

Es. 8. Determinare le soluzioni reali del seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

$$\begin{cases} 5x_3 + 15x_5 & = & 5 \\ 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 + x_5 & = & 3 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 1 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 & = & 2 \end{cases}$$

Es. 9. Discutere e risolvere al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ i sistemi lineari

$$\begin{cases} x + 2y - 3z & = & 4 \\ 3x - y + 5z & = & 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z & = & a + 2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x + 2y - z + w & = & 1 \\ ax + y + z + w & = & b \\ 3x + 2y \quad + aw & = & 1 + a \end{cases}$$

SOLUZIONE DI ALCUNI ESERCIZI

Es. 1 Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ si ha $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; siccome, qualunque sia A, questo prodotto ha 0 nel posto $(2,1)$ mentre la matrice nella parte destra dell'uguaglianza richiesta ha nello stesso posto 1, si conclude che non esiste alcuna matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ che soddisfa la condizione data. ◀

Es. 2 Si ha $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O} \neq A$ e, per ogni $n > 2$, $A^n = A^2 A^{n-2} = \mathbf{O}$, quindi il primo insieme ha due elementi.

Si ha $B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B^3 = B^2 B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B^4 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sia ora $n > 4$; se n è un multiplo di 4, allora $n = 4t$ e $B^n = (B^4)^t = I_2^t = I_2$, altrimenti $n = 4t + r$ con $r \in \{1, 2, 3\}$ e allora $B^n = B^{4t+r} = (B^4)^t B^r = B^r$ e quindi il secondo insieme ha 4 elementi.

Poniamo $C = BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Si ha $C^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot C$ e quindi $C^3 = C^2 C = 2 \cdot C^2 = 2^2 \cdot C$. Proviamo per induzione su n che $C^n = 2^{n-1} \cdot C$ per ogni $n \geq 1$: l'affermazione è banalmente vera per $n = 1$; inoltre se vale $C^n = 2^{n-1} \cdot C$, allora $C^{n+1} = C^n C = 2^{n-1} \cdot C^2 = 2^n \cdot C$ e ciò completa la prova. Gli elementi del terzo insieme sono perciò $C, 2 \cdot C, 2^2 \cdot C, \ldots, 2^n \cdot C, \ldots$, tali elementi sono a due a due distinti e pertanto l'insieme è infinito. ◀

Es. 3 Siano $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ e poniamo $D = AB = (d_{ij}) \in M_{m,p}(\mathbb{R})$, $E = BC = (e_{ij}) \in M_{n,q}(\mathbb{R})$ e confrontiamo l'elemento di posto (s,t) in DC con quello in AE: il primo si ottiene moltiplicando la riga s di D con la colonna t di C quindi è

$$\sum_{h=1}^{p} d_{sh} c_{ht} = \sum_{h=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{sk} b_{kh} \right) c_{ht} = \sum_{h=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{sk} b_{kh}\, c_{ht} \right) \tag{1}$$

L'elemento di posto (s,t) in AE si ottiene moltiplicando la riga s di A per la colonna t di E, quindi è:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{sk} e_{kt} = \sum_{k=1}^{n} a_{sk} \left(\sum_{h=1}^{p} b_{kh} c_{ht} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{p} a_{sk} b_{kh}\, c_{ht} \right) \tag{2}$$

Per provare che (1) = (2) si consideri la tabella con p righe e n colonne che ha nel posto (h,k) il numero reale $a_{sk} b_{kh}\, c_{ht}$ e si osservi che in (1) si calcola la somma di tutti gli elementi della tabella sommando prima gli elementi di ciascuna riga e poi i valori parziali così ottenuti, mentre nella (2) si calcola la stessa somma procedendo prima a sommare gli elementi di ciascuna colonna. ◀

Es. 4 Sia $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$; Imponendo che $A\,B = I_2$ si hanno le seguenti condizioni su a, b, c, d: $2a + c = 1$, $2b + d = 0$, $3c = 0$, $3d = 1$ che sono verificate se e solo se $c = 0$, $d = 1/3$, $a = 1/2$ e $b = -1/6$. Ora se $B = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ si verifica subito che $B\,A = I_2$ e quindi A è invertibile e B è l'inversa di A. ◀

Es. 5 $A^7 = A^3 A^3 A = (5\,I_3)\,(5\,I_3)\,A = 25\,I_3^2\,A = 25\,A$. Da $A^3 = 5I_3$ segue che $I_3 = \left(\frac{1}{5} A^2\right) A = A \left(\frac{1}{5} A^2\right)$, quindi $A^{-1} = \frac{1}{5} A^2$. ◀

Es. 6 Si ha:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5}R_3]{R_3 - 2R_2,} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 - R_3]{R_2 - 2R_3,} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per la seconda matrice si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-R_1,\\ R_3-R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3\leftrightarrow R_2,\\ -R_2,\\ -R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1-R_2,\\ R_2-R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per la terza matrice si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-2R_1,\\ R_3-R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}R_2\\ R_1+R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◀

Es. 7 a) $\begin{cases} x_2 & = 1 \\ x_3 & = 2 \\ x_2+x_3 & = 0 \end{cases}$ equivalente al sistema $\begin{cases} x_2 & = 1 \\ x_3 & = 2 \\ 0 & = 1 \end{cases}$ che non ha soluzioni.

b) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3 & = 1 \\ x_1+x_2 & = 2 \\ x_1 & = 3 \end{cases}$ equivalente al sistema $\begin{cases} x_1 & = 3 \\ x_2 & = -1 \\ x_3 & = -1 \end{cases}$ che ha l'unica soluzione $(3,-1,-1)$.

c) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3 & = 1 \\ 2x_1+2x_2+x_3 & = 0 \\ x_1+x_2+2x_3 & = -1 \end{cases}$ equivalente al sistema $\begin{cases} x_1+x_2 & = 1/3 \\ x_3 & = -2/3 \end{cases}$

le cui soluzioni sono: $x_1 = 1/3 - t,\ x_2 = t,\ x_3 = -2/3$ con $t \in K$. ◀

Es. 8 La matrice completa è $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right]$; riducendola totalmente per righe (con le operazioni elementari $E_{1,4}$, $E_{2,1}(-2)$, $E_{3,1}(-1)$, $E_{2,4}$, $E_2(1/5)$, $E3(-1)$, $E_{4,3}(1)$, $E_{1,3}(-4)$, $E_{1,2}(-2)$) si ottiene

$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$; il sistema dato è quindi equivalente al sistema lineare $\begin{cases} x_2-9x_5 & = -4 \\ x_3+3x_5 & = 1 \\ x_4+x_5 & = 1 \end{cases}$

le cui soluzioni reali sono $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (s, -4+9t, 1-3t, 1-t, t)$, con $s,t \in \mathbb{R}$. ◀

Es. 9 Operando sulle righe della matrice completa (R_2-3R_1, R_3-4R_1, $-R_2$, $-R_3$, R_3-R_2, $-R_3$) si ottiene la matrice $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right]$.

Ora se $a = 4$, l'ultima riga è nulla e il sistema è equivalente a $\begin{cases} x+2y-3z & = 4 \\ 7y-14z & = 10 \end{cases}$ che ha ∞^1 soluzioni $(x,y,z) = (\frac{8}{7}-t, \frac{10}{7}+2t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$.

Se $a = -4$, il sistema è incompatibile, mentre se $a \neq \pm 4$ riducendo totalmente per righe la matrice precedente si ottiene $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_3 \end{array}\right]$, dove $\gamma_1 = \frac{8a+25}{7(a+4)}$, $\gamma_2 = \frac{10a+54}{7(a+4)}$, $\gamma_3 = \frac{1}{a+4}$ e il sistema ha come unica soluzione $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. ◀